合情推理

翻译：Simbaforrest

2012 年 10 月 20 日

摘要

本文翻译自《概率论沉思录》（Probability Theory: The Logic of Science）第一部分Principles and elementary applications的第一章“Plausible Reasoning”。

目录

> 实际上到目前为止，逻辑学所熟悉的要么是完全肯定或否定的，要么就是完全不能确定的，总之（幸运的是）没有什么是需要我们进行推理的。所以，这个世界真正的逻辑就是可能性的计算，它需要考虑到可能性的大小，而这些则（应该）存在于一个理性的人的脑中。
>
> 詹姆斯·克拉克·麦克斯韦（1850）

设想这样一幅情景：在一个漆黑的夜晚，一名警察走在一条街道上，当然街上没什么人了。突然他听到了一个自动警铃响声大作，于是他朝街道对面看去，发现了一个珠宝店和上面的一扇破损的窗户。接着一位带着面具的家伙从那扇破窗户中爬了出来，还背着一大袋昂贵的珠宝。我们的警察先生当然毫不犹豫的断定那个家伙不老实了。但是他是通过了一个什么样的推理过程得出这样的结论的呢？别急，先让我们来看看这些问题的一般性质吧。

1 演绎推理与合情推理

稍微思考一会儿，问题就很清楚了：我们警察先生的结论并不是由证据进行演绎推理所得出的，因为对任何事情都完全可能存在一个完美的无罪辩护。例如，有可能那个家伙是珠宝店的老板，而他正好在一个化装舞会后回家，却发现自己没有带钥匙，然而正当他走过他自己的店铺时，一辆经过的卡车里飞出一块石头并砸碎了他店铺的玻璃，而他所做的一切都不过是为了保护他自己的财产而已。

现在看来，虽然警察的推理过程并非演绎推理，但我们得说那还是有一定说服力的。因为证据虽然没有证明那个家伙有罪，但是它的确使得警察的推理非常合乎当时的情形。可以肯定的是，早在我们学习相关数学理论之前，这个例子里的这种推理方式我们就或多或少的比较熟练了。在醒着的每一个小时里，我们几乎都一定会遇到这样一些情况，比如今天会不会下雨。而在这些情况中，我们通常没有足够多的信息来进行演绎推理，但是我们仍然必须马上决定如何应对。

尽管我们经常运用合情推断，可那都是在一种非常微妙的不自觉的过程中形成的。虽然历史记录中有关这个问题的讨论已经延续了24个世纪，但可能从未曾有过谁对此过程做出的分析能够让所有人完全满意的。在这个工作上，我们将报告一些有用的和令人鼓舞的新进展，它们通过明确的定理代替相互冲突的直觉判断，通过由某些非常基础（并且近乎无法避免）的理性标准而唯一确定的规则代替特定的过程。

所有关于这些问题的讨论这么开始：给出演绎推理与合情推理之间差异的例子。例如被广泛使用的亚里士多德三段论推理法（公元前四世纪）[1]，演绎推理最终都可以分解为两个强三段论的反复使用：

$$\frac{\begin{array}{c}\text{如果A真, 则B也真}\\ \text{现在A真}\end{array}}{\text{所以B真}} \tag{1}$$

[1]如今，关于亚里士多德的贡献的确切性质有几种不同的见解。这些问题与我们目前讨论的目的无关，但是有兴趣的读者可以在Lukasiewicz(1957)中找到大量相关讨论。

以及其逆形式：

$$\frac{\begin{array}{c}\text{如果A真, 则B也真}\\ \text{现在B假}\end{array}}{\text{所以A假}} \tag{2}$$

这就是我们总想使用的推理方法。但是，正如上文所说，在大多数情况下我们没有恰好所需的那些信息来进行这种推理。我们退而看看弱三段论(归纳论证，epagoge)：

$$\frac{\begin{array}{c}\text{如果A真, 则B也真}\\ \text{现在B真}\end{array}}{\text{所以A真是合情的}} \tag{3}$$

证据并未证明A真，但证实一个可能是由A导致的结果，则更容易使我们相信A真。比如让

$$\begin{aligned} A &\equiv \text{最迟在早上10点钟会开始下雨；}\\ B &\equiv \text{在早上10点钟之前天会多云。}\end{aligned}$$

在早上9点45时观察到多云现象并不能使我们在逻辑上确定马上将要下雨；虽然如此，可我们的常识却可能遵循着弱三段论而促使着我们更改计划并表现得我们真的相信马上要下雨了，当然云得足够黑才行。

这个例子同时也表明大前提'如果A则B'所表达的B仅仅是A的逻辑结果，而不一定是物理后果，因为物理后果在时间上一定晚于物理原因。早上10点钟的雨并不是早上9点45分的乌云的物理原因。然而，正确的逻辑联系并不是不确定的因果指向（乌云$\Longrightarrow$雨），而是确定的非因果指向（雨$\Longrightarrow$乌云）。

这一段非常经典!

在一开始我们就强调了我们所考虑的是逻辑联系，因为有的关于演绎推理的讨论和应用存在严重的错误，由于他们没能看到逻辑蕴涵关系和物理因果关系之间的区别。这种区别由Simon和Rescher于1966年进行过深入的分析，他们注意到，所有将蕴涵表达为物理因果关系的尝试都因为缺乏像第二个三段论(2)那样的逆否（contraposition）描述而失败。就是说，如果我们尝试将大前提解释成'A是B的物理原因'，那么我们就很难承认'非B是非A的物理原因'。在第三章我们将看到，把合情推理用物理因果来解释也没有更好的进展。

另一个弱三段论，仍然使用同样的大前提：

$$\frac{\begin{array}{c}\text{如果A真, 则B也真}\\ \text{现在A假}\end{array}}{\text{所以B假是合情的}} \tag{4}$$

在这个例子里，证据不能证明B是假的，但是排除一个可能使得B真的原因，则更容易使我们相信B假。一个科学家的用来接受或拒绝自己理论的推理，几乎全部由第二和第三种三段论组成。

现在，我们警察先生的推理过程则甚至不是以上的任何一种类型。一个更弱的三段论是对其最好的描述：

$$\frac{\begin{array}{c}\text{如果A真, 则B真变得更合情}\\ \text{现在B真}\end{array}}{\text{所以A真变得更合情}} \tag{5}$$

尽管在使用A和B来代指时这种论证存在明显的漏洞，但是我们得承认，警察的结论很有说服力。在这个特例里面，有某些东西使得我们相信，警察的论证几乎和演绎推理有着同样的效力。

这个例子表明大脑在进行合情推理的时候，不仅决定哪些东西是否变得更加合情或者更加不合情，而且它还在以某种方式来衡量合情的程度。早上10点钟下雨的合情程度十分依赖于早上9点45分乌云的厚度。而且大脑也在同时利用有关该问题的陈旧信息和最新数据。为了决定怎么办，我们会尝试回忆起过去关于云和雨的经验，以及昨晚的天气预报。

为了展示警察同样也在利用过去所有警察们的经验，我们只需要改变一下情景。假设对于每位警察来说，那种事件每晚都会发生几次，而且每次那个家伙都被最终证明无罪。很快，警察们将学会忽视这种琐碎的小事。

所以说，在我们的推理过程中，我们十分依赖于我们的先验知识来帮助我们评估一个新问题的合情程度。这个推理过程是在不知不觉中瞬间发生的，而我们把这种十分复杂的过程称之为常识。

数学家乔治·波利亚在1945年和1954年写了三本关于合情推理的书，指出了大量有趣的例子，并且表明我们进行合情推理时有着明确的规则（虽然在他的工作中这些仍以定性的方式描述）。上述的弱三段论出自他的第三卷。我们强烈推荐读者们查阅波利亚的论述，它们是了本书中许多观点的源泉。后面我们会介绍如何将波利亚的原则进行量化，从而得出有用的应用。

很明显，上述的演绎推理具有这样的性质：我们可以通过一长串(1)和(2)类型的推理得到几乎和前提一样确定的结论。而在其他类型的推理过程中，例如(3)–(5),结论的可靠性会随着我们所经历的不同阶段而产生变化。但是在他们的量化形式中，我们会发现，在许多情况下，我们的结论的确定性仍然可以趋近于演绎推理所得到结论的确定性（就像警察那个例子中我们所期望的那样）。波利亚表明了实际上即使一个纯数学家大多数时候也在使用这些更弱形式的推理。当然，在发表一个新的定理时，数学家首先会努力尝试创作一个仅仅使用第一种三段论的论证。而推导定理的推理过程首先几乎总是包含着一个更弱形式的推理（例如基于由类比所得的猜想）。S.Banach的评论中也表达了同样的观点（引自S.Ulam于1957年）：

> *好的数学家可以看到定理之间的相似之处；伟大的数学家则可以看到相似点之间的相似之处。*

那么作为第一个方向，让我们看看一些很有启发性的与其他领域的类比，它们自身都是基于合情推理的。

2 与物理理论的类比

在物理学中，我们很快就知道世界过于复杂，我们无法立即对它进行分析。只有将之分解为小碎片并且分开来研究我们才能取得进展。有时候，我们建立一种数学模型来产生某一个碎片的几个特性，而且每次我们都觉得取得了进展。这些模型被称之为*物理理论*。随着知识的发展，我们可以建立出更好的模型，产生出真实世界的更多特征，并且还更精确。没人知道这个过程是会有一些自然的终点，还是会无穷尽的进行下去。

当尝试理解常识的时候，我们也会采用类似的方法。我们不会试着一口吃个胖子，而是在能够构建理想数学模型并产生一些特征的时候感到我们取得了进展。我们期待现在所能建立的任何模型将来都会被更完善的模型所取代，并且我们同样不清楚这个过程是否存在自然的终点。

和物理理论的类比要比仅仅在方法上进行类比深刻。通常，那些我们最熟悉的事情结果却是最让人难以理解的。那些大多数人类所不知道的现象（例如铁和镍的紫外光谱差异）可以通过详尽的

数学细节来解释，但是所有现代科学如果碰上像一片草叶生长这样寻常的事实，基本上都没用。因此，不能对我们的模型期望过高，我们必须做好准备：某些我们最熟悉的心理活动特征也许正是建立适当模型的最大困难之一。

当然还有其他很多类比。在物理学中我们经常发现，任何知识进展都会导致巨大的实用价值，但是却具有不可预料的性质。伦琴发现了X光，从而产生了医疗诊断的新可能性；麦克斯韦为了使电磁方程组自洽而为H的旋度方程添加的新项使得全球即时通讯成为可能。[2]

我们的对常识建立的数学模型也存在这种实用特性。任何成功的模型，即使它只能产生少数几种常识的特点，也将被证明是某领域内常识的有利扩展。在这领域内，许多推理问题包含众多复杂细节，只有借助它才能得以解决。

3 会思考的计算机

模型有许多不同类型的实际作用。许多人喜欢说，‘人类绝对无法发明一台代替人脑的机器，人脑能做太多机器做不了的事情了。’对此，冯·诺依曼于1948年在普林斯顿所做的一个关于计算机的讲话中给出了漂亮的回答，而笔者恰好有幸参加了那次谈话。为了回答听众的典型提问（‘但是当然了，仅仅一台机器是没法思考的，对吗？’），他说道：

> 您坚持说存在机器所无法做的事情。但是如果您能够准确地告诉我到底有什么是机器所无法做到的，那么我总可以发明一台机器专门来做那件事情！

原则上，一台机器唯一无法完成的操作就是那些我们自己都没法仔细描述的事情，或者是无法再有限步骤内完成的事情。当然，有的人会联想到哥德尔不完备性定理，不确定性，永不停机的图灵机等等。但是为了回答所有的质疑，我们只需要指出人脑本身的存在即可。就像冯诺依曼所指出的那样，制造有思想的机器的唯一真正限制是我们自己并不确切的知道是什么产生了‘思想’。

但是在我们学习常识的过程中，我们将会接触到关于思维机制的非常明确的观点。每次我们通过规定明确的操作集合来建立一个复制了部分常识的数学模型时，他就告诉了我们如何来建造这样一个机器，（即写一段计算机程序），该机器会接收不完整的信息，并且通过应用上述弱三段论的量化形式来进行合情推理而非演绎推理。

的确，这种为了特殊推理问题而开发的电脑软件是当前该领域内最热门且有用的。它们所处理的问题可能如：给一大堆数据，包含10000个独立观测，由这些数据以及现有的所有先验知识，来确定100个关于事情起因的不同假设的合情程度。

我们的常识也许足够用来在两个结果迥异的假设之间做出决定；但若是处理100个结果相差无几的假设，如果没有计算机的帮助，以及发展完善的数学理论来告诉我们如何编制程序，我们将不知所措。也就是说，在之前那个警察的三段论(5)中，是什么决定A的合情程度是大大上升到以致几乎可以肯定A真的地步，还是它仅上升得微乎其微使得B是真是假对结论几乎没有影响呢？目前工作的目的就是在现今可能的深度和广度下发展一套数学理论以回答这些问题。

[2] Thanks to 谭晟宇: 这句话是在说Maxwell在建立电磁场方程组的时候发现，为了使得电磁场方程组是自洽的，必须在磁场的旋度方程中添加一项，而这一项的添加直接从理论上导出了电磁场可以满足波动方程，也就是预言了电磁波的产生；而电磁波正是今天即时通信的传播媒介。—译者注。

虽然我们希望有一套数学理论可以在编制程序时有帮助，而能够思考的计算机这样的想法在心理上同样也对发展数学理论有益。关于人脑实际推理过程的问题充满了感性和奇怪的误解。讨论这些时，很难不卷入对我们现有知识无法确定的东西的辩论，而这些和我们这里的目的无关。

显然，真实人脑的操作是如此复杂以至于我们无法假装出可以解释其神秘的地方，而且在任何情况下我们都没有尝试去解释更不用说复制出人脑出现的所有差错与矛盾。这是一个很有意思并且很重要的问题，但是它也不是我们这里要研究的。我们的主题是逻辑规范性原则，而不是心理学或神经生理学的原则。

为了强调这一点，我们不会问这种问题：'我们如何来建立人类常识的数学模型呢？'，而是这样问：'我们如何建立一台机器，使其可以遵循明确定义的一系列原则进行有用的合情推理，而这些原则表达了理想状态下的常识？'

4 介绍一下机器人

为了将注意力转移到有建设性的事情上，并且远离那些富有争议的无关紧要的东西，我们应该想象一个虚拟的东西。其大脑由我们设计，所以其推理是遵循确定有限条规则的。我们希望人脑中有一些简单而必须的东西，而这些规则将会由那些东西推断出来。也就是说，我们认为，一个理性的人在发现自己破坏了那些东西后，会希望因此而校正自己的想法。

原则上，我们可以使用任何我们想用的规则，这也是我们定义将要研究的机器人的方法。将之与自己的推理过程进行比较，如果发现没有任何相似之处，那么就可以重新设计一个更接近的。一旦你发现两者非常类似，并且决定相信这个机器人，让它来帮助你进行推理，那么理论就成功了，而不再是一个假设了。

我们的机器人将对命题进行推理。如前所述，我们把各种不同命题用斜体的大写字母来表示，如A, B, C等等，并且暂时我们要求任何命题必须对这个机器人来说是没有歧义的，而且还要有简单明确非真即假的逻辑类型。也就是说，除非明确声明，我们只考虑二值逻辑，亦即亚里士多德逻辑。我们不要求这样一个亚里士多德命题的真假必须可以由可行的调查所证明，实际上正是因为我们无法这么做才需要机器人的帮助。例如，笔者个人认为以下两个命题都是真的：

$$\begin{aligned} A &\equiv \text{贝多芬和柏辽兹从未见过面。} \\ B &\equiv \text{贝多芬的音乐比柏辽兹有着更好的持续性，} \\ &\ \text{而柏辽兹最好不过是各部分完全的平等。} \end{aligned}$$

目前我们的机器人是不能处理命题B[3]而可以处理命题A的，即使A的真假如今可能难以被证明[4]。在我们的理论发展起来以后，将会发现一件很有意思的事，那就是目前关于命题必须像命题A那样为亚里士多德命题的限制是可以放松的，因此我们的机器人就可以帮助我们处理更加模糊的像命题B这样的命题了（参见第十八章关于A_p分布的内容）。[5]

[3]命题B完全没看懂。都是不懂音乐惹的祸。原文是：Beethoven’s music has a better sustained quality than that of Berlioz, although Berlioz at his best is the equal of anybody.—译者注。

[4]他们的会面在时间上是可能的，因为有24年他们同时活在世上；而我怀疑它的原因是柏辽兹在其回忆录中并未提及任何这样的会面，另外他也没有明确的说过他俩没有会过面。

[5]制作这样一种机器，它能够像人类那样认知像A这种命题，是十分困难的。而且人工智能方面的许多研究就是尝试发明一些专家设备来处理这类问题。然而，在第四章我们会发现，对我们来说，这种问题根本不存在，我们的合情推理自然而然的提供了其数学等价物。

5 布尔代数

为了更加正式的介绍这些观点，我们介绍一些概念，它们来自通常的符号逻辑或布尔代数，这么称呼是因为乔治·布尔于1854年引入了类似的概念。当然，早在布尔之前好几世纪演绎逻辑自身的原则就已经很清楚了，而且我们将看到，所有由布尔代数得出的结论，已经以特殊形式包含在1812年给出的合情推理的规则里面了。符号

$$AB, \tag{6}$$

被称为逻辑乘，或者叫与（conjunction），表示命题'A和B都真'。显然，我们表述两者顺序的先后是无关紧要的，即AB和BA是一样的。表达式

$$A + B, \tag{7}$$

被称为逻辑和，或者叫或（disjunction），表示命题'命题A和B至少有一个为真'，并且与$B + A$等价。这些符号仅仅是命题的简写形式，并不代表数值。

给两个命题A，B，可能当且仅当一个真时另一个才真，这时我们就说两者具有同样的真值。这种情况可能是简单的复述（即A和B说的是同一件事情），也可能是经过大量数学处理之后证明A是B的充要条件。从逻辑的角度出发这没什么区别，无论用什么方法，一旦A和B被证明具有同样的真值，那么它们在逻辑上就是等价的命题，任何关于其中一个命题真假的证据也一定可以证明另一个的真假，而且从两者出发作出的进一步推理也完全一样。

那么显然，关于合情推理的最原始的公理就是：两个具有相同真值的命题的合情程度相同。如果不是布尔自己1854年在这一点上犯了错误，这也许本不值一提。他错误的把两个实际上不一样的命题当成了等价命题，然后却又无法从他们不同的合情程度重发现矛盾。3年后，布尔于1857年给出了修订后的理论来取代早先书中的理论，对此事的更多评论可以参考Keynes和Jaynes的书。

在布尔代数中，等号不用于表示数值上的相等而是真值的相等：$A = B$，同样布尔代数中的'等式'表示等号左边的命题与等号右边的命题具有相同真值。而符号'$\equiv$'通常表示'由定义相等'。

为了描述复杂命题，我们就像在普通代数中那样使用括号，即用来表明命题间合并的先后顺序（有时即使不必要，我们也用它们来使表达式显得更清晰）。没有括号我们就可以看到像便携计算器那样的代数层次规则：$AB + C$表示$(AB) + C$而不是$A(B + C)$。

对命题的*否定*通过上划线表示：

$$\overline{A} \equiv A\text{假。} \tag{8}$$

A和$\overline{A}$的关系式互补的：

$$A = \overline{A}\text{假，} \tag{9}$$

并且这与我们把哪个命题用上划线字母表示没有关系。不过值得注意的是上划线的明确使用。例如，根据上述习惯，

$$\overline{AB} = AB\text{假；} \tag{10}$$

$$\overline{A}\,\overline{B} = A\text{和}B\text{都为假。} \tag{11}$$

这两个命题是完全不同的，实际上$\overline{AB}$并非$\overline{A}$和$\overline{B}$的逻辑乘，而是逻辑和：$\overline{AB} = \overline{A} + \overline{B}$。

理解了这些之后，布尔代数就可以通过一些相当琐碎而又明显的基本性质来描述了：[6]

$$
\begin{aligned}
&\text{同一律（Idempotence）：} && \begin{cases} AA = A \\ A + A = A \end{cases} \\
&\text{交换律（Commutativity）：} && \begin{cases} AB = BA \\ A + B = B + A \end{cases} \\
&\text{结合律（Associativity）：} && \begin{cases} A(BC) = (AB)C = ABC \\ A + (B + C) = (A + B) + C = A + B + C \end{cases} \\
&\text{分配律（Distributivity）：} && \begin{cases} A(B + C) = AB + AC \\ A + (BC) = (A + B)(A + C) \end{cases} \\
&\text{对偶律（Duality）：} && \begin{cases} \text{如果} C = AB\text{，那么} \overline{C} = \overline{A} + \overline{B} \\ \text{如果} D = A + B\text{，那么} \overline{D} = \overline{A}\,\overline{B} \end{cases}
\end{aligned}
\tag{12}
$$

但是通过这些性质我们可以证明一些更为复杂的关系。例如我们可以证明如下定理：

$$\text{如果} \overline{B} = AD\text{，那么} A\overline{B} = \overline{B} \text{而且} B\overline{A} = \overline{A}\text{。} \tag{13}$$

蕴涵

命题

$$A \Rightarrow B \tag{14}$$

读作‘A蕴涵B’，它并不断言A或B其中一个为真，它仅仅表明$A\overline{B}$为假，亦即$(\overline{A} + B)$为真。这也可以写成逻辑方程$A = AB$。就是说，给定(14)，如果A真那么B一定真，或者如果B假那么A一定假。这就是强三段论(1)和(2)所陈述的意思。

另一方面，如果A假，(14)则没有阐述关于B的任何论断；同样如果B真，(14)也没有阐述关于A的任何论断。但是在这些情况里，我们的弱三段论(3)，(4)就起作用了。那么在一方面来说，‘弱三段论’这个术语被误解了。基于弱三段论的合情推理理论并不是逻辑的‘弱形式’；它是逻辑的扩展，其内容在之前的演绎逻辑中并未展现。在后面的章节我们会看到，我们的规则把演绎逻辑作为一自身的一个特例。

一个棘手的问题

注意到一般语言中，人们会把‘A蕴涵B’理解成B在逻辑上可以由A演绎得出。但是在形式逻辑（formal logic）中，‘A蕴涵B’仅仅意味着命题A和AB真值相同。一般来说，B是否可以从逻辑上由A演绎得出并不仅仅依赖于命题A和B；它还取决于我们认为真并且用之进行演绎推理的一系列命题（$A, A', A'', \ldots$）的完整性。Devinatz于1968年，以及Hamilton于1988年分别给出了二进制蕴涵操作的真值表，表明$A \Rightarrow B$当且仅当,A真B假时为假，其他所有情况下，$A \Rightarrow B$均为真!

[6]分配律第二条疑为原作者笔误。—译者注。

一开始这可能的确让人吃惊，但是请注意，如果A和B都真，那么$A = AB$以及$A \Rightarrow B$也都为真；在形式逻辑中每个真命题都可以蕴涵其他真命题。从另一方面来说，如果A假，那么对于所有的Q来说AQ都假，所以$A = AB$与$A = A\overline{B}$都真，也就是说$A \Rightarrow B$和$A \Rightarrow \overline{B}$都真：一个假的命题蕴含着所有的命题。如果我们想把这些都解释成逻辑演绎的话（就是说认为B和$\overline{B}$都能通过A演绎推理出来），那么会发现所有的假命题都会导致逻辑上的矛盾。可是命题'贝多芬比柏辽兹活的久'虽然是假命题，但是逻辑上并不是矛盾的（因为贝多芬的确比许多柏辽兹的同龄人活的久）。

显然，仅仅知道命题A和B都真还没有足够信息判断一个命题是否能从逻辑上推出另一命题，哪怕附加了一些未指明的其他命题作为'工具'[7]。有关从一个命题集合进行逻辑推理得出另外一个命题的问题将在第二章结尾讨论哥德尔定理时谈到。一般语言中'蕴涵'这个词语的意义与形式逻辑中的意义极不相同，而如果未能正确理解这个棘手的问题，可能导致严重的错误：这告诉我们，选用'蕴涵'这个词是十分不幸的，而这一点在传统逻辑论述中没有得到足够的强调。

6 操作的完备集

我们注意到在设计我们的机器人的时候将需要使用演绎逻辑的某些特点。我们已经定义了四种操作，或者说'联结词'，并由此从两个命题A, B可以定义其他命题：逻辑乘或者与运算AB,逻辑和或者或运算$A + B$，蕴含$A \Rightarrow B$，以及取反运算$\overline{A}$。通过以任意方式反复组合这些操作，我们可以生成任意多的新命题，例如

$$C \equiv (A + \overline{B})(\overline{A} + A\overline{B}) + \overline{A}B(A + B). \tag{15}$$

这下我们就有许多问题可问了：这样生成的一类新命题的集合有多大？它是无限集合吗，或者存在某有限集合在此运算下封闭吗？是否任意由A, B定义的命题都可以如此表示，或者是否还需要除此四种之外更多的联结词？或者这四种联结词已经是超完备的了因此可以省略其中某些联结词？足够生成所有此类A和B的'逻辑函数'的最小的操作集合是什么？如果不止两个初始命题A, B而是有任意数量的命题$\{A_1, \cdots, A_n\}$，这一操作集是否仍然足够生成所有可能的$\{A_1, \cdots, A_n\}$的逻辑函数呢？

所有这些问题都很容易回答，而其答案对于逻辑，概率论以及计算机设计都大有用处。概括地说，我们所问的是，从我们目前的有利情况开始，我们是否能够（1）增加函数的数量，（2）减少操作的数量。第一个问题的回答很简单，注意到虽然用(15)的形式表达的两个命题可能看上去完全不同，但是从逻辑的观点出发，若两命题的真值完全相同，则它们完全没有区别。例如，留给读者验证(15)中的C在逻辑上和$C = (B \Rightarrow \overline{A})$这个蕴含声明完全等价。

在当前阶段，由于我们仅把注意力放在亚里士多德命题[8]上，任何诸如(15)的逻辑函数$C = f(A, B)$都只可能取真或假两个值；同样，'独立变量'A和B也仅可取那两个值。

现在，一个逻辑学家可能会反对我们的记号，因为符号A已经被定义为表达某个固定命题了，因此其真值是不变的；所以如果我们希望考虑逻辑函数的话，我们不应该写成$C = f(A, B)$，而应该引入新的符号$z = f(x, y)$，其中x, y, z是'陈述变量'，并可以向其中带入不同的陈述A, B, C。但是

[7]显然，这句话的后半部分我没有看懂，原文为：Obviously, merely knowing that propositions A and B are both true does not provide enough information to decide whether either is logically deducible from the other, plus some unspecified 'toolbox' of other propositions.—译者注。

[8]Aristotelian proposition，Aristotelian logic identifies a proposition as a sentence which affirms or denies a predicate of a subject.(Wikipedia, Proposition)–译者注。

若A表明某固定而未指明的命题，那么它仍可以取真或者取假。仅仅通过如(15)这样的等式我们就可达到同样的灵活性；也就是说，我们使用可变陈述而不是陈述变量。

在$C = f(A, B)$这种形式中，我们关心的逻辑函数是定义在一个仅含有$2^2 = 4$个点的离散'空间'S上的；也就是说，A和B只可能在$\{TT, TF, FT, FF\}$上取值；而在每个点上，函数$f(A, B)$可以取$\{T, F\}$两种值。所以，恰好有$2^4 = 16$种不同的逻辑函数$f(A, B)$，而且没有更多了。包含了n个命题的表达式$B = f(A_1, \cdots, A_n)$是在有着$M = 2^n$个点的空间S上的逻辑函数；并且恰好有2^M个这样的方程。

在$n = 1$的情况下，一共有四个逻辑函数$\{f_1(A), \cdots, f_4(A)\}$，我们可以通过在一张真值表内枚举出所有可能的取值来定义它们：

A	T	F
$f_1(A)$	T	T
$f_2(A)$	T	F
$f_3(A)$	F	T
$f_4(A)$	F	F

但是很显然，通过检查，这些函数就是

$$\begin{aligned} f_1(A) &= A + \overline{A} \\ f_2(A) &= A \\ f_3(A) &= \overline{A} \\ f_4(A) &= A\overline{A}, \end{aligned} \tag{16}$$

这样我们就通过枚举证明了为了从单个命题生成所有的逻辑函数，那三个操作：与运算，或运算以及取反运算是充足的。

对于一般的n，首先考虑这一类特殊函数，它们每个都在且仅在S上的一点处取真值。对于$n = 2$的情况，一共有$2^n = 4$个这样的函数，

A, B	TT	TF	FT	FF
$f_1(A, B)$	T	F	F	F
$f_2(A, B)$	F	T	F	F
$f_3(A, B)$	F	F	T	F
$f_4(A, B)$	F	F	F	T

显然通过检查这就是四个基本的与函数，

$$\begin{aligned} f_1(A, B) &= AB \\ f_2(A, B) &= A\overline{B} \\ f_3(A, B) &= \overline{A}B \\ f_4(A, B) &= \overline{A}\,\overline{B}. \end{aligned} \tag{17}$$

现在考虑任意逻辑函数，它们在S上的某些指定点取真值；例如，$f_5(A, B)$与$f_6(A, B)$，定义为

A,B	TT	TF	FT	FF
$f_5(A,B)$	F	T	F	T
$f_6(A,B)$	T	F	T	T

我们断言每一个这样的函数都是(17)中与函数的逻辑和，并且它们在同样的点上取真值（这一点并非微不足道；读者应该自己验证它们）。因此，

$$\begin{aligned} f_5(A,B) &= f_2(A,B) + f_4(A,B) \\ &= A\overline{B} + \overline{A}\,\overline{B} \\ &= (A+\overline{A})\overline{B} \\ &= \overline{B}, \end{aligned} \tag{18}$$

同样有，

$$\begin{aligned} f_6(A,B) &= f_1(A,B) + f_3(A,B) \\ &= AB + \overline{A}B + \overline{A}\,\overline{B} \\ &= B + \overline{A}\,\overline{B} \\ &= \overline{A} + B. \end{aligned} \tag{19}$$

这也就是说通过如上讨论的真值表所定义的$f_6(A,B)$其实就是是蕴含操作$f_6(A,B)=(A\Rightarrow B)$。任何至少在$S$的一个点为真的逻辑函数$f(A,B)$都可以用这种方式表达成(17)中几个基本与运算的逻辑和。一共有$2^4-1=15$个这样的逻辑函数。对于剩下的那个总是取假值的函数，通过自相矛盾即可构建，即$f_{16}(A,B)=A\overline{A}$。

这种方法（在逻辑课本中被称为'还原至析取范式[9]'）对于任意的n都可行。例如，$n=5$的例子中有$2^5=32$种基本的与运算，

$$\{ABCDE, ABCD\overline{E}, ABC\overline{D}E, \cdots, \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}\,\overline{D}\,\overline{E}\}, \tag{20}$$

以及$2^{32}=4294967296$种不同的逻辑函数$f_i(A,B,C,D,E)$；对于第4294967296个函数可以写成基本与运算的逻辑和，即自相矛盾

$$f_{4294967296}(A,B,C,D,E) = A\overline{A}. \tag{21}$$

因此，我们可以通过'在思维中构建'的方法验证使用这三种操作

$$\{\text{与运算，或运算，取反运算}\}, i.e. \{\text{与，或，非}\}, \tag{22}$$

来生成所有可能的逻辑函数是充足的；或者更简明的说，它们构成了一个完备集。

(12)中的对偶律表明，一个更小的集合就已经充足了；A,B的或运算和否认它们两者皆假是等效的：

$$A + B = \overline{(\overline{A}\,\overline{B})}. \tag{23}$$

因此，(与，非)这两个操作已经构成了演绎逻辑的一个完备集了[10]。这个事实对于确定我们何时拥有一个合情推理规则的完备集是非常重要的；参见第二章。

[9] reduction to disjunctive normal form，逻辑学术语–译者注。

[10] 留给你思考：是否只需要这两个操作即可写出任何计算机程序？

那么现在很显然我们无法删去这些操作中的任意一个而只留下另一个；也就是说，'与'操作无法规约到非操作；而非操作也无法被任何数量的'与'操作替代。但是这仍然留下了这样一种可能性，即与运算和取反运算两者可以被规约到第三种未曾介绍的操作，使得那一种逻辑操作自身就构成了一个完备集。

很有趣的是，实际上不只有一个而是两个这样的操作。'与非（NAND）'操作被定义为对'与'操作取反：

$$A \uparrow B \equiv \overline{AB} = \overline{A} + \overline{B} \tag{24}$$

我们可以读作'A与非B'。这样我们就有

$$\begin{aligned} \overline{A} &= A \uparrow A \\ AB &= (A \uparrow B) \uparrow (A \uparrow B) \\ A + B &= (A \uparrow A) \uparrow (B \uparrow B). \end{aligned} \tag{25}$$

因此，每一个逻辑函数都可以直接由与非操作构建。类似的，定义为

$$A \downarrow B \equiv \overline{A + B} = \overline{A}\,\overline{B} \tag{26}$$

的或非（NOR）操作也可以独自构成所有的逻辑函数：

$$\begin{aligned} \overline{A} &= A \downarrow A \\ A + B &= (A \downarrow B) \downarrow (A \downarrow B) \\ AB &= (A \downarrow A) \downarrow (B \downarrow B). \end{aligned} \tag{27}$$

人们可以利用这些来设计计算机以及逻辑电路。一个'逻辑门'是这样一种电路，除了一个公共地线以外，有两个输入终端和一个输出终端。任何一个终端相对于地的电压只能取两个值；比如说+3伏，或者说'高'电压，代表'真'；0伏，或者说'低'电压，代表'假'。一个与非门当且仅当其两个输入端中至少一个为低电压时才输出高电压；或者相同说法是，当且仅当输入两个高电压的时候才输出低电压；而对于一个或非门来说，当且仅当输入两个低电压时才输出高电压。

'四与非门（quad NAND gate）'是逻辑电路中的一个标准组成部分，它是集成在一个半导体芯片上的四个独立的与非门。仅仅给定足够数量的这种元件，就足以通过以不同方式将它们相互连接来生成任何所需的逻辑函数了。

这一段深入演绎逻辑的短途旅行对我们来说已经足够了。在许多书中都介绍了更进一步的发展；例如Copi（1994）给出了对于亚里士多德逻辑的现代处理方式。对于非亚里士多德形式，并在哥德尔不完备性，可计算性，可确定性，图灵机等问题上有特殊强调的问题，可以参见Hamilton（1988）。

现在回到我们对于逻辑的扩展上来，这将会遵循接下来讨论的一些条件。我们称之为'要求（desiderata）'而非'公理（axioms）'，因为他们不没有断言某些事情是'真的'，他们只不过陈述了一些看起来是我们所需的目的。在第二章中我们将会给出一些数学分析，来讨论是否可以达到这些目的而又不造成任何矛盾，以及它们是否确定了任何唯一的逻辑扩展。

7 基本要求

根据我们所提供的证据，我们的机器人必须给任何一个它将进行推理的命题赋予一定的合情度；而无论何时当它接收到了新的证据的时候，它必须考虑新证据并相应的修订那些合情度。为了能够在其大脑内的电路中存储并且修改这些合情度，它们必须对应于一定的物理量，诸如电压或者脉冲持续时间或者一个二进制数等等—-这取决于我们的工程师是如何设计这些细节的。就当前的目的来说，这意味着存在一种合情度和实数之间的联系：

$$\text{（I）} \qquad \text{合情度由实数表达。} \tag{28}$$

要求（I）实际上就是强制要求机器人的大脑必须是通过某些明确的物理过程来工作的。然而恰好在理论上也有这样的要求（参见附录A)；我们没有见过任何一个一致的理论是完全没有一个性质和要求（I）在功能上等价的。

我们采纳一个自然但是并非必须的惯例：更大的合情度对应于一个更大的数。同样，假设连续的性质也会给我们带来方便，而这一性质在目前这个阶段还很难简洁地表述；从直觉上来说：比某个合情度只大那么一点点的另一个合情度，应该仅对应于另外一个只大一点点的数。

大体上来说，机器人分配给某个命题A的合情度将取决于我们是否告诉它另外某个命题B为真。采用Keynes（1921）和Cox（1961）的记号，我们将其表达为符号

$$A \mid B, \tag{29}$$

读作'给定B真那么A真的条件合情度'或者'给定B那么A'。它代表了某个实数。例如，

$$A \mid BC \tag{30}$$

（读作给定BC那么A）表达了给定B和C都真那么A真的合情度。又例如，

$$A + B \mid CD \tag{31}$$

表达了给定C和D都真那么A和B至少有一个真的合情度。我们已经决定用更大的数来表达更大的合情度，因此

$$(A \mid B) > (C \mid B) \tag{32}$$

就是说，给定B，A比C更合情理。在这种表达中，虽然合情度的符号就是没有圆括号的$A \mid B$的形式，我们通常会加上圆括号来使表达式更加清晰。因此(32)所说的和下式是一个意思

$$A \mid B > C \mid B, \tag{33}$$

但是这个式子的意思对于我们来说还是很明确的。

为了避免不可能问题，我们不会让我们的机器人遭受从不可能或者互相矛盾的前提进行推理的痛苦；这甚至都可能没有'正确'的回答。因此，当B和C互相矛盾的时候我们根本不定义$A \mid BC$。因此无论何时出现这样的符号，我们都认为B和C是相容的命题。

另外，我们也不希望这个机器人以一种和你我截然不同的思考方式来思考。所以我们应该将其推理过程设计成至少在性质上和人类推理的方式相似，诸如前述的弱三段论以及其他很多相似的推理。

因此，若原有信息C被更新成C'后A的合情度增加了：

$$(A \mid C') > (A \mid C); \tag{34}$$

但是给定A那么B的合情度没有变化：

$$(B \mid AC') = (B \mid AC). \tag{35}$$

当然这只会使得A和B皆真的合情度上升而非下降：

$$(AB \mid C') \geqslant (AB \mid C); \tag{36}$$

而且这造成A假的合情度下降：

$$(\overline{A} \mid C') < (\overline{A} \mid C). \tag{37}$$

这些性质上的要求给出了机器人进行推理的'思考方向'；它们所说的不过就是合情程度变化了多少，除了我们的连续性假设（这也是在性质上的和常识的一个对应）现在要求如果$A \mid C$只变化了一点点，那么可以推出$AB \mid C$和$\overline{A} \mid C$也只变化了一点点。我们如何明确的使用这些性质上的要求将会在下一章谈到我们为何需要它们的时候给出。现在我们将他们简洁的总结为：

（II）　在性质上与常识对应。 (38)

最后我们给机器人另一个我们希望的要求—每个诚实的人对于这个要求往往都心向往之却不能至：它总是进行一致的推理。在这里，我们所说的'一致'就是一般口语中的以下三个意思：

（IIIa）　如果一个结论可以通过多种不同方法推理得到，那么每一种方法所得到的结果应该是一样的。 (39)

（IIIb）　机器人总是会考虑它有的所有与问题相关的证据。它不会随意的忽略某些信息，而只通过其余的信息来得到结论。换句话说，机器人是没有意识形态的。 (40)

（IIIc）　机器人总是通过等价的合情度来表达等价的知识状态。也就是说，如果机器人对于两个问题的知识状态相同（可能除了对于命题的标记不同以外），那么它一定给两者赋予同样的合情程度。 (41)

要求（I），（II）以及（IIIa）属于对我们机器人大脑内部工作的基本'结构性'要求，而（IIIb）和（IIIc）属于一种'接口'条件，显示了机器人的行为应该如何与外部世界相关联。

现在，大多数人会惊奇地发现我们对于那些要求的搜索就到此为止了。如上那些条件实际上唯一地确定了我们的机器人进行推理所必须遵循的规则；也就是说，只存在一组对于合情度的数学操作能够满足以上所有性质。这些规则在第二章中会通过演绎推理得到。

（在大多数章节的最后，我们会插入一节非正式的评注，在其中我们收集了大量的边注，背景材料等等。读者可以跳过他们而不会漏过论证的主线。）

8 评注

为了各种各样的政治、经济、道德、宗教、精神、环境、饮食以及艺术教条目的，政客、广告商、推销员以及布道者非常清楚的知道，容易犯错的人脑实在是太容易被一些聪明的废话所欺骗从而违背上述要求了。我们应该确保在我们的机器人这里，他们没法得逞。

我们在此强调另一点此机器人和人脑的区别。由要求I，该机器人关于任意命题的心理状态都可以由一个实数表达。现在很明显的是我们对于任何给定命题的态度很可能有不止一个'坐标'。你我同时对某个命题所做出的评判并不只有它是否合情，还包括我们是否希望它成立，它是否重要，它是否有用，它是否有趣，它是否好笑，它是否道德等等。如果我们假设这些评判中的每一个都可以通过一个数字来表达，那么人的心理状态的完备描述就可以表达成一个维数很高的空间中的一个向量。

当然并非所有的命题都要求这样。例如，命题'水的折射率小于1.3'就不会产生任何与感情相关的东西；因此它所生成的心理状态也只有很少的几个坐标。另一方面，命题'你岳母弄坏了你的新车'则产生了一个具有很多坐标的心理状态。通常，日常生活中的各种情况往往是那些有很多坐标的向量。正因此，我们认为心理活动中最熟悉的那些例子往往都是最难以某个模型来再现的。也许这样我们就可以解释为什么科学和数学是各种人类活动中最成功的了：它们所处理的命题只产生最简单的心理状态。给定一定量的人脑的瑕疵，这些心理状态又是最难以被影响的。

当然，出于很多原因我们不想让我们的机器人更多地采纳任何这些来自其他坐标的'人类'因素。电脑不会被感情因素所影响，不会讨厌一个冗长的问题，不会去追寻一个隐藏的不利于我们的目标，正是由于这些事实才使得对于某些任务来说它们比人更安全。

我们突然插述这些是为了指出还有很大一块未被探索过的领域，在那里有可能推广和扩展我们这里将要展开的理论；也许这可能启发别人尝试自己去开发心理活动的'多维理论'，这种理论可能会越来越接近实际人脑的行为—-那其中并非所有行为都是我们不希望要的。这种理论一旦成功，其重要性可能是我们目前所无法想象的[11]。

然而目前我们应该满足于一个更加适度的任务。是否可以为合情推理开发一个一致的'一维'模型？显然，如果我们能够通过单个实数来唯一的表达合情度，并且忽略上述其他'坐标'，那么我们的问题是最简单的。

必须强调的是，我们并未断言实际人脑中的合情度有着唯一的数值度量。我们的任务并非作假设—-或者说推测—-这样的事情；我们不是去调查是否可能在我们的机器人内设置一套这样的对应而不造成矛盾。

但是对某些人来说，看起来我们已经做了过多的假设，因此给推广我们的理论带来了不必要的限制。为什么我们一定要用实数来表达合情度？一个基于诸如$(A \mid C) > (B \mid C)$)这样的关系性质的'相当'的理论是否就足够了呢？这一点将在附录A中进行讨论，我们描述了一些其他的构建概率理论的方法，并且指出已有一些尝试来发展这种相当的理论，人们以为它们在逻辑上要更简单或者更一般。但是实际上并非如此；因此，虽然很有可能能够用其他的方式来建立这种基础，其最终结果也不会有区别。

[11]的确，有的心理学家认为只要五维可能就最够描述一个人的性格；也就是说，我们所有人之间的区别只不过是五个基本性格特征的不同混合，而这可能就是由基因所决定的。不过对我们来说，这似乎过于简化了；可以辨的化学因素在时空内连续的变化（例如大脑中糖代谢的分布）可以影响心理活动，但它显然不能仅用五维空间来合理的描述。当然，还是有可能仅用五个数字便可描述足够多的事实以用于很多不同目的了。

8.1 公用语言与形式逻辑

我们应该指出形式逻辑的陈述和日常语言的陈述之间的区别。后者有可能被认为只是一种更不精确的表达；但是通过仔细的检查，两者之间的联系其实并不是这么简单。在我们看来，日常语言如果被仔细使用的话是不一定会比形式逻辑更含糊的；但是日常语言的规则更加复杂，因此有着比形式逻辑更加丰富的表达方式的可能性。

特别的，出于其他原因，比逻辑更加频繁的被使用的公用语言发展出了一些形式逻辑所没有的微妙的变化—-不直接陈述而是暗示某事物的方法。甲先生为了申明自己的客观性会说'我相信我所看见的。'乙先生则反驳说：'他根本看不见他不相信的。'从形式逻辑出发，他们似乎在说同一件事情；但是从公用语言出发，这两个陈述其意图与效果都有着相反的含义。

来看一个取自数学课本的不那么平凡的例子。令L表示平面上的一条直线，S表示该平面上的一个无限点集，其中每一个点都被映射到L上。现在考虑以下两个陈述：

（I） 极限的映射就是映射的极限。

（II） 映射的极限就是极限的映射。

它们在语法上有着'A是B'和'B是A'的结构，因此它们看上去在逻辑上也是等价的。然而在书中，一般来说（I）是正确的而（II）则不是，因为可能存在集合的极限不存在而映射的极限存在的情况。

从中我们可以看出，在公用语言中—-哪怕是数学书中—-我们学到了要在精确解析中加入那些微妙的含义，如果不是看到这样的例子我们可能都没有意识到这一点。我们是这样来解释'A是B'的，首先断言A存在，就好像是说一种大前提，然后剩下的陈述被理解为在此前提下成立。换一种说法，在公用语言中，动词'是'暗示了一种主语和宾语的区别，而符号'='在形式逻辑或者是传统数学中却并无此含义。（然而，在计算机语言中我们碰到诸如'J=J+1'这样的陈述，大家似乎都明白其含义，但是其中的'='符号就有了这种区别了。）

另一个好玩的例子就是那句古话'知识就是力量'，无论是在人际关系中还是热力学中，这的确是一句能让人信服的话。一个石化行业的广告把这句话换成了'权力就是知识'，一个荒谬的错误。

这些例子提醒我们动词'是'就像其他动词一样有着主语和谓语；但是人们很少注意到，这个动词有着两个完全不同的含义。一个以英语为母语的人也许会被要求说出以下两个陈述的区别：'The room is noisy'以及'There is noise in the room'。但是在土耳其语中这些不同的意思是通过不同的词语表达出来的，其区别如此明显以至于若是使用了错误的词语就会被误解。后面那句话是使用的一种存在论的方式来声称某事物的物理存在性，而前面那句话则是使用的一种认识论的方式，表达的仅是说话者个人的观点。

公用语言，或者至少是英语，有着一种普遍的倾向，就是通过使用一种企图与存在论陈述相混淆的语法形式来隐瞒认识论陈述。当前概率理论中一类主要的错误就来自于不小心忽视了这一点。为了使用存在论的方式来解释第一种陈述，可以断言每个人自己个人的想法和知觉在自然界中是外在存在的。我们称之为'心理投射谬误（mind projection fallacy）'，并且请注意接下来它所经常导致的问题。但是这种问题是很并不仅仅局限于概率论中；很多哲学家以及格式塔心理学家们的话，以及很多物理学家解释量子论的尝试都很明显是胡说八道，因为他们都掉入了心理投射谬误中。

这些例子表明，当尝试将复杂的公用语言翻译成更简单的形式逻辑陈述时，我们必须十分小心。当然，公用语言经常比我们在形式逻辑中所希望的更含糊。但是每个人都能够意识并注意到这

一点，所以也就没有那么危险了。

期望我们的机器人能够处理公用语言中的各种细微变化就太难了，一个人可是要花费二十多年的时间才能做到的。因此，我们的机器人将仍旧像一个小孩一样—-它仅从字面上处理所有的陈述并且毫不犹豫地把说出真相，完全不管这有可能冒犯到谁。

作者本人并不清楚设计一个新的能够识别这些细微的意义变化的模型机器人有多难，或者更不清楚有多么令人向往。当然，原则上来说，人脑的存在已经证明了这个问题是有解的。但是实际上，冯诺依曼原则已然适用；我们所设计的机器人无法做到这一点，除非某人发展了一套'微妙变化识别'理论，而这缩短了明确规定一个操作集合的过程。这一点，我们非常乐意留给别人来做。

无论如何，我们目前的模型机器人已经基本上做成了，因为如今基本上任意非平凡的概率估计都可以在电脑上进行了。而给计算机编程的人，无论他们是否以这种方式看，必须根据对机器人应该如何工作的预想来设计该机器人的部分大脑。但是现在使用的计算机程序很少能够完全满足我们的几个要求；实际上，大多数都是直觉上的特定过程，它们没有任何定义好的要求。

任何这种特定过程基本上都是用于某种特殊领域的，但是第二章的证明将会展示，任何和概率理论规则有冲突的特定过程必须生成可论证的不一致性，这样我们才能尝试将其使用在受限制的领域上。我们的目标是，直接从一致性要求出发，以一种可以应用于任何合情推理问题的足够明确的形式，发展一套普遍的推断原则，从而一劳永逸地避免这种问题。

8.2 吹毛求疵

从上面我们很清楚的看到，目前我们使用术语'布尔代数'来表示二值逻辑，其中使用符号'A'代表命题。一个喜欢挑刺上了瘾的人向我们抱怨说，有的数学家用了一种稍稍不同的意思来使用这个术语，其中'A'可以指代一类命题。但是这两种用法并无冲突；我们承认这个更为广义的意思，不过没发现对我们有何裨益。

这样一类被我们称之为'布尔代数'的规则和符号有时也被称作'命题演算（the propositional calculus）'。这个术语似乎仅因为我们也需要另一套被称作'谓词演算（the predicate calculus）'的规则和符号才被使用。然而，这些新的符号其实只是我们熟悉的短语的简称罢了。'全称量词（universal quantifier）'不过是'对于所有的（for all）'的简称罢了；'存在量词（existential quantifier）'就是'存在一个（there is a）'的简称。如果我们使用通俗易懂的话描述我们的陈述，我们已经自动在使用所需的谓词演算了，而且更加清晰。

第二强三段论的有效性（在二值逻辑中）有时经常被质疑。然而在当代数学中以下论证还是有效的：假设定理可以被一个反例的存在所证伪，所谓反例即一个我们从中可以推出矛盾的不一致的陈述的集合，而证明一个命题可以使用*归谬法*（*reductio ad absurdum*），从其否命题中推出矛盾。这对我们来说就足够了；我们满足于遵循这个传统。我们之所以觉得这样做是安全的，是由于即使逻辑在将来有可能朝前发展，却很难往回退。一种新的逻辑有可能会描述一些亚里士多德逻辑所无法描述的新的结果；其实这也就是我们这里想创造的。但是可以肯定，如果在亚里士多德逻辑可以应用的地方，新的逻辑被发现与其有所冲突，我们会认为这个新的逻辑是有着致命的问题的。

因此，对于那些觉得被二值演绎逻辑所限制的人，我们只能说：'如果你想这么做的话，请务必考察所有其他的可能性吧；若是你发现了一种新的结果，而其又是二值逻辑或是我们的扩展所没有包含的，而其对于科学推理又很有用处，那么请尽快告知我们。'实际上，在文献中已经有很多

不同的相互不一致多值逻辑了。但是在附录A中我们论述到，其中不存在任何有用的而且又不为二值逻辑所包含的内容；也就是说，对于一个命题集合应用一种n值逻辑，要么等价于对一个扩大后的集合应用二值逻辑，要么其内部就存在不一致性。

我们的实际经验也和这种推测一致；实际上，多值逻辑看上去并非被用于发现新的有用的结果，而是尝试消除二值逻辑中可能的困难，尤其在量子论，模糊集以及人工智能中。但是经过仔细的研究，我们已知的所有这种困难都已被证明只不过是心理投射谬误的例子而已，而这些所导致的应该直接是对于那些概念的修正而非一种新的逻辑。